



TITLE:

無限複体のコホモロジー (複体の局所化)

AUTHOR(S):

吉村, 善一

CITATION:

吉村, 善一. 無限複体のコホモロジー (複体の局所化). 数理解析研究所講究録 1972, 133: 1-14

ISSUE DATE:

1972-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106604>

RIGHT:

無限複体のコホモロジー

大阪市大 理 吉 村 善 一

§0. 序

H^* を基点を頂点にもつ CW 複体 X の上の一般簡約コホモロジー論とする。 $H^k(X)$ の減少 filtration を

$$F^n H^k(X) = \ker \{ H^k(X) \rightarrow H^k(X^{n-1}) \}, \quad n \geq 0,$$

によって定義すると, この filtration は $H^k(X)$ に

$F^n H^k(X)$ を $\{0\}$ の直列とする位相を与える。 $S^k(X)$

を $\{0\}$ の閉包, すなわち

$$S^k(X) = \bigcap_{n \geq 0} F^n H^k(X)$$

とすると

$$H^k(X) \text{ が Hausdorff 空間} \Leftrightarrow S^k(X) = \{0\}.$$

我々は この note で

(I) $S^k(X)$ の characterization

(II) $S^k(X) = \{0\}$ の criteria

を定める。 それらは次の結果である。

2

H^* is additive cohomology theory of finite type
 X is based CW-complex with finite skeletons X^n
 とする時,

定理(I). $x \in H^k(X)$ とする. 次の i) ~ iv) は
 同値条件である.

- i) $x \in S^k(X)$,
- ii) $\forall n \neq 0, \exists y = y(n) \in H^k(X)$ s.t. $x = ny$,
- iii) $\forall n \neq 0, \exists z = z(n) \in S^k(X)$ s.t. $x = nz$,
- iv) $x \in \text{Im} \{ \varphi : H^k(X; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^k(X) \}$.

定理(II). 次の i) ~ ix) は同値条件である.

- i) $S^k(X) = \{0\}$,
- ii) $H^k(X)$ は Hausdorff 空間である,
- iii) $H^k(X)$ は completeかつ Hausdorff 空間である,
- iv) $\pi : H^k(X) \rightarrow \varprojlim H^k(X^n)$ は同型写像である,
- v) $\varprojlim H^{k-1}(X^n) = \{0\}$,
- vi) $\{H^{k-1}(X^n)\}_{n \geq 0}$ は Mittag-Leffler 条件を満たす,
- vii) $\forall n, \exists r_0 = r_0(k, n)$ s.t. $E_{r_0}^{n, k-n-1} = E_r^{n, k-n-1}$
 for $r_0 \leq r < \infty$ in Atiyah-Hirzebruch spectral sequence
 $\{E_r, d_r\}$,
- viii) $\forall n, \exists r_0 = r_0(k, n)$ s.t. $E_{r_0}^{n, k-n-1} = E_{\infty}^{n, k-n-1}$,

(ix) $0 \rightarrow H^k(X) \xrightarrow{\iota} H^k(X; \hat{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\kappa} H^k(X; \hat{\mathbb{Z}}/2) \rightarrow 0$
 は exact である。

§ 1. Direct limits of CW-complexes

= の節で type $(\hat{\mathbb{Z}}, 2)$ と type $(\hat{\mathbb{Z}}/2, 2)$ の co-Moore spaces \tilde{M} と S_2 を作る。

$\exists X_n, \varphi_{n+1}^n, n \geq 1$ を based CW-complexes と based cellular maps である正整数 n の direct system とする。

$\varinjlim (X_n, \varphi_{n+1}^n)$ を infinite mapping cylinder として定義する、すなわち

$$\varinjlim (X_n, \varphi_{n+1}^n) = \coprod X_n \times I / \sim$$

$$\sim: (x_n, 1) \sim (\varphi_{n+1}^n x_n, 0), \quad (x_n, t) \sim x_n$$

その時

(1.1) $\varinjlim X_n$ は based CW-complex となる。

X を trivial direct limit $\varinjlim (X_n = X, \varphi_{n+1}^n = \text{id})$ の subcomplex $X_1 \times \{0\}$ とみ直し、

$$\iota: X \rightarrow \varinjlim X \quad \text{と} \quad p: \varinjlim X \rightarrow X$$

を canonical inclusion と projection とする。

(1.2) p は deformation retraction である。

§ 1.7 の性質を得る。

$$(1.3) \text{ i) } \varinjlim (Y_n \bigcup_{T_n} C X_n) = \varinjlim Y_n \bigcup_{\varinjlim T_n} C(\varinjlim X_n)$$

4

== 1 $\{f_n\} : \{X_n\} \rightarrow \{Y_n\}$ は direct systems の morphism である。

ii) $\varinjlim (X_n \wedge Z) = \varinjlim X_n \wedge Z$ 但し X_n, Z は countable.

次の定理は $\varinjlim X_n$ の コホモロジー群 の計算を可能にする。

定理 (Milnor). H^* は additive cohomology theory, $\{X_n\}$ は direct system とすると,

$0 \rightarrow \varprojlim^1 H^{k-1}(X_n) \rightarrow H^k(\varinjlim X_n) \rightarrow \varprojlim H^k(X_n) \rightarrow 0$ は exact である。特に X は based CW-complex とある時,

$0 \rightarrow \varprojlim^1 H^{k-1}(X^n) \rightarrow H^k(X) \xrightarrow{\pi} \varprojlim H^k(X^n) \rightarrow 0$ は exact である。

次に $\{X_q, \varphi_{qr}^q\}$ は divisibility によって順序づけられた整数 > 1 の集合 I の direct system とする。

今 $I = \{p_n\}_{n \geq 1}$ は 全ての素数の集合とし,

$$l_n = p_1^n \cdots p_n^n$$

とある時, $\{l_n\}_{n \geq 1}$ は linearly ordered cofinal sequence になるから

$$\varinjlim (X_q, \varphi_{qr}^q) = \varinjlim (X_{l_n}, \varphi_{l_{n+1}}^{l_n})$$

<

とある。

(注意) 任意の linearly ordered ordinal sequences $\{q_n\}$ と $\{r_n\}$ を選ぶ時, $\varinjlim (X_{q_n}, \varphi_{q_{n+1}}^{i_n}) \simeq \varinjlim (X_{r_n}, \varphi_{r_{n+1}}^{i_n})$ は同じ homotopy type を持つ。

$M_q = S^1 \vee_q C S^1$ は type $(\mathbb{Z}_q, 2)$ の co-Moore space とおくと

$$T = r \vee C1 : M_q \longrightarrow M_{qr}$$

は cellular map である。

(1.4) $\check{M} = \varinjlim (M_q, \varphi_{qr}^q = 1)$, $S_{\mathbb{Z}} = \varinjlim (S^1, \varphi_{qr}^q = r)$ とおくことができる。

命題 (1.5). \check{M} と $S_{\mathbb{Z}}$ は type $(\hat{\mathbb{Z}}, 2)$ と $(\mathbb{Z}/2, 2)$ の co-Moore spaces である。

(証明) Milnor の定理 (5.1)

$$0 \longrightarrow \varprojlim^1 H^{k-1}(M_q) \longrightarrow H^k(\check{M}) \longrightarrow \varprojlim H^k(M_q) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \varprojlim^1 (H^k(S^1), \varphi_{qr}^q = r) \longrightarrow H^k(S_{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \varprojlim (H^k(S^1), \varphi_{qr}^q = r) \longrightarrow 0$$

は exact である。 $H^k(M_q)$ は有限群 (5.1),

$$\varprojlim^1 H^k(M_q) = 0 \text{ とおえる。} \quad \text{この結果}$$

$$H^2(\check{M}) = \varprojlim \mathbb{Z}_q = \hat{\mathbb{Z}} \quad \text{で} \quad H^k(\check{M}) = 0 \quad k \neq 2,$$

よって \check{M} は type $(\hat{\mathbb{Z}}, 2)$ の co-Moore space である。

一方, inverse systems の exact 列

$$0 \longrightarrow \{\mathbb{Z}, \varphi_{qr}^q = r\} \xrightarrow{\{p_q\}} \{\mathbb{Z}, \varphi_{qr}^q = \text{id}\} \xrightarrow{\{p_q\}} \{\mathbb{Z}_q, \varphi_{qr}^q = p_{qr}^q\} \longrightarrow 0$$

と

6

と考へる。 今の時 exact 列

$$0 \rightarrow \varprojlim (\mathbb{Z}, \psi_q^{pr}=r) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \hat{\mathbb{Z}} \rightarrow \varprojlim^1 (\mathbb{Z}, \psi_q^{pr}=r) \rightarrow 0$$

を得る。 ι は natural inclusion である。 τ は

$$H^2(S_x) = \varprojlim^1 (\mathbb{Z}, \psi_q^{pr}=r) = \hat{\mathbb{Z}}/2, \quad H^k(S_x) = 0 \quad k \neq 2.$$

すなわち S_x は type $(\hat{\mathbb{Z}}/2, 2)$ の co -Morse space である。

(注意) $\tilde{M} \times S_x$ は type $(\mathbb{Q}/2, 1)$ と $(\mathbb{Q}, 1)$ の Morse space である。

§ 2. Cohomology theories $\mathfrak{h}^*(\cdot; \hat{\mathbb{Z}})$ and $\mathfrak{h}^*(\cdot; \hat{\mathbb{Z}}/2)$

\mathfrak{h}^* は additive cohomology theory of finite type

X は based CW-complex with finite skeletons

である。 co -Morse spaces \tilde{M} と S_x を用いて

cohomology theories $\mathfrak{h}^*(\cdot; \hat{\mathbb{Z}})$ と $\mathfrak{h}^*(\cdot; \hat{\mathbb{Z}}/2)$ は

$$(2.1) \quad \mathfrak{h}^k(X; \hat{\mathbb{Z}}) = \mathfrak{h}^{k+2}(X \wedge \tilde{M})$$

$$\mathfrak{h}^k(X; \hat{\mathbb{Z}}/2) = \mathfrak{h}^{k+2}(X \wedge S_x)$$

によって定義する。 今の時 $\mathfrak{h}^*(\cdot; \hat{\mathbb{Z}})$ と $\mathfrak{h}^*(\cdot; \hat{\mathbb{Z}}/2)$

は additive である。

direct systems の列

$$\{S^1, \varphi_{pr}^1 = \text{id}\} \xrightarrow{\pi_1} \{S^1, \varphi_{pr}^1 = r\} \xrightarrow{\pi_1} \{M^1, \varphi_{pr}^1 = \tau\} \xrightarrow{\pi_1} \{S^2, \varphi_{pr}^1 = \text{id}\}$$

と考へる。

$$l = \varprojlim \{ \cdot \} : S^1 \rightarrow \varprojlim S^1 \rightarrow S_x$$

$$\tilde{i} = \varinjlim \tilde{i}_q : S_L \longrightarrow \tilde{M}$$

$$\tilde{\pi} = \varprojlim \pi_q : \tilde{M} \longrightarrow \varprojlim S^2 \longrightarrow S^2$$

と書くとき、(1.2) と (1.3) は 1)

$$\tilde{M} = S_L \bigcup_{\varinjlim f} C(\varinjlim S^1) \simeq S_L \bigcup_L C(S^1)$$

とわかるので

補題 (2.2). $S^1 \xrightarrow{\ell} S_L \xrightarrow{\tilde{i}} \tilde{M} \xrightarrow{\tilde{\pi}} S^2$ は

cofibring sequence である。

今

$$L = (1_{\tilde{M}} \tilde{\pi})^* \wedge^2 : \mathbb{R}^k(X) \longrightarrow \mathbb{R}^k(X = \hat{\Sigma})$$

$$K = (1_{\tilde{M}} \tilde{i})^* : \mathbb{R}^k(X = \hat{\Sigma}) \longrightarrow \mathbb{R}^k(X = \hat{\Sigma}/2)$$

$$W = \wedge^{-1}(1_L \ell)^* : \mathbb{R}^k(X = \hat{\Sigma}/2) \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}(X)$$

と定義する時、(2.2) は 1)

$$(2.2') \quad \mathbb{R}^k(X) \xrightarrow{W} \mathbb{R}^k(X) \xrightarrow{L} \mathbb{R}^k(X = \hat{\Sigma}) \xrightarrow{K} \mathbb{R}^k(X = \hat{\Sigma}/2) \xrightarrow{W}$$

は exact 列 である。

補題 (2.3). i) $\mathbb{R}^k(X = \hat{\Sigma})$ は Hausdorff, i.e.,

$$\hat{\pi} : \mathbb{R}^k(X = \hat{\Sigma}) \longrightarrow \varprojlim \mathbb{R}^k(X^n = \hat{\Sigma}) \text{ は同型である}$$

$$ii) \mathbb{R}^k(X = \hat{\Sigma}) \longrightarrow \varprojlim \mathbb{R}^k(X = \Sigma_q) \text{ は同型である.}$$

(証明) Milnor の定理によつて

$$\varprojlim^1 \mathbb{R}^{k-1}(X^n = \hat{\Sigma}) = 0 \quad \text{と} \quad \varprojlim^1 \mathbb{R}^{k-1}(X = \Sigma_q) = 0$$

を示せば十分である。再び Milnor の定理を用いると、

$$0 \longrightarrow \varprojlim^1 \mathbb{R}^k(X^n \wedge M_q) \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}(X^n \wedge \tilde{M}) \longrightarrow \varprojlim^1 \mathbb{R}^{k+1}(X^n \wedge M_q) \longrightarrow 0$$

は exact である。今 $H^{k+1}(X^n \wedge M_q)$ に discrete topology により位相群の構造を与える。

$\varprojlim_q H^{k+1}(X^n \wedge M_q)$ は profinite になり、 $\varprojlim_q H^{k+1}(X^n \wedge M_q) = 0$ となる。

$$\varprojlim_n (\varprojlim_q H^{k+1}(X^n \wedge M_q)) = 0.$$

よって $\varprojlim_n H^{k+1}(X^n; \hat{\mathbb{Z}}) = 0$ となる。

同様に $\varprojlim_q H^{k+1}(X; \mathbb{Z}_q) = \varprojlim_q (\varprojlim_n H^{k+1}(X^n \wedge M_q)) = 0$.

補題(2.4). X は finite complex である。

$$H^k(X; \hat{\mathbb{Z}}) = H^k(X) \otimes \hat{\mathbb{Z}}, \quad H^k(X; \hat{\mathbb{Z}}/2) = H^k(X) \otimes \hat{\mathbb{Z}}/2.$$

(証明) exact 列

$$0 \rightarrow \varprojlim H^k(X) \otimes \mathbb{Z}_q \rightarrow \varprojlim H^k(X; \mathbb{Z}_q) \rightarrow \varprojlim \text{Tor}(H^{k+1}(X), \mathbb{Z}_q) \rightarrow 0$$

を考える。

$$\varprojlim H^k(X) \otimes \mathbb{Z}_q \cong H^k(X) \otimes \hat{\mathbb{Z}},$$

$$\varprojlim \text{Tor}(H^{k+1}(X), \mathbb{Z}_q) \cong \text{Tor}(H^{k+1}(X), \hat{\mathbb{Z}}) = 0$$

を用いて、(2.3) より

$$H^k(X) \otimes \hat{\mathbb{Z}} = H^k(X; \hat{\mathbb{Z}})$$

次に可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^k(X) & \rightarrow & H^k(X) \otimes \hat{\mathbb{Z}} & \rightarrow & H^k(X) \otimes \hat{\mathbb{Z}}/2 \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \cong & & \\ & & H^k(X) & \hookrightarrow & H^k(X; \hat{\mathbb{Z}}) & \xrightarrow{\quad \kappa \quad} & H^k(X; \hat{\mathbb{Z}}/2) \xrightarrow{\quad \omega \quad} \end{array}$$

を考える。これは単射になるから第2の結論を得る。

命題 (2.5)

$$f^{K-1}(X: \hat{\mathbb{Z}}/2) \xrightarrow{\omega} f^K(X) \xrightarrow{\pi} \varprojlim f^K(X^n) \rightarrow 0$$

は exact 列である。

(証明) 次の可換な図式

$$\begin{array}{ccccc} \rightarrow f^{K-1}(X: \hat{\mathbb{Z}}/2) & \xrightarrow{\omega} & f^K(X) & \xrightarrow{\pi} & f^K(X: \hat{\mathbb{Z}}) \rightarrow \\ & & \pi \downarrow & & \downarrow \hat{\pi} \\ & & \varprojlim f^K(X^n) & \xrightarrow{\psi} & \varprojlim f^K(X^n: \hat{\mathbb{Z}}) \end{array}$$

において $\hat{\pi}$ は (2.3) より同型である。又 X^n は

finite なので (2.4) より $\psi: f^K(X^n) \rightarrow f^K(X^n: \hat{\mathbb{Z}})$

は単射, 二つのことから $\varprojlim \psi$ も単射である。ゆえに

(2.2') より命題を得る。

系 (2.6). $S^K(X) = \text{Im} \{ \omega: f^{K-1}(X: \hat{\mathbb{Z}}/2) \rightarrow f^K(X) \}$.

特に, $f^K(X)$ が Hausdorff である \Leftrightarrow

$$0 \rightarrow f^K(X) \xrightarrow{\omega} f^K(X: \hat{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\pi} f^K(X: \hat{\mathbb{Z}}/2) \rightarrow 0 \text{ は exact.}$$

§3. 定理 (I) の証明

$$K_L = \varinjlim K: S_L \rightarrow S_L, \quad K \neq 0, \quad \text{と置く.}$$

$$\text{補題 (3.1).} \quad (1_X \wedge K_L)^* = f^*(X: \hat{\mathbb{Z}}/2) \rightarrow f^*(X: \hat{\mathbb{Z}}/2)$$

は同型であって, $\omega(1_X \wedge K_L)^* = K \cdot \omega$.

(証明) K_L が homotopy equivalence であることを示せば $(1_X \wedge K_L)^*$ は同型になる。

$$S_\ell = \varinjlim (S_{\ell_n} = S', \varphi_{\ell_{n+1}}^{\ell_n} = \ell_{n+1}/\ell_n) = \varinjlim (S_q = S', \varphi_{q^r}^q = r)$$

と書く。

$$K'_\ell = \varinjlim 1 = S_\ell = \varinjlim S_q \rightarrow \varinjlim S_{|k|q} \cong S_\ell$$

また考えれば、 $K/|K| \cdot K'_\ell$ は K_ℓ の homotopy inverse
 を与える。

$$\begin{array}{ccc} S_q & \xrightarrow{K} & S_q \\ |K| \downarrow & \swarrow K/|K| & \downarrow |K| \\ S_{|K|q} & \xrightarrow{K} & S_{|K|q} \end{array}$$

(注意) $(1_X \wedge K_\ell)^* = K$ である。 万が一

$\pi^K(X = \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の元は 任意の整数 $\neq 0$ によって
 divisible である。

定理 (I) $x \in \pi^K(X)$ とする。 次の i) ~ iv) は同値

i) $x \in S^K(X)$

ii) $\forall n \neq 0 \quad \exists y = y(n) \in \pi^K(X) \text{ s.t. } x = ny$,

iii) $\forall n \neq 0 \quad \exists z = z(n) \in S^K(X) \text{ s.t. } x = nz$

iv) $x \in \text{Im } \omega: \pi^{K-1}(X = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \pi^K(X)$

(証明) (2.6) より i) \Leftrightarrow iv) であるので

iv) \Rightarrow iii) \Rightarrow ii) \Rightarrow i) の順序で示せばよい。

iv) \Rightarrow iii) (3.1) より明らか。

iii) \Rightarrow ii) 自明

ii) \Rightarrow i) $x \in \pi^K(X)$ が 任意の 整数 $\neq 0$ によって

divisible とある。 $\pi(x) = \{ \omega^* x \mid \omega \in \varprojlim \pi^K(X^n) \}$

において $\forall x \in H^k(X^n)$ は任意の整数 $k \neq 0$ によって
 divisible である $H^k(X^n)$ は finitely generated であるので
 $\forall x = 0$, すなわち $\pi(x) = 0$ である。
 従って $x \in S^k(X)$.

系 (I, 1) $H^k(X)$ は Hausdorff ではないならば

$S^k(X)$ は infinite 個の generators を持つ。

系 (I, 2) $H^k(X)$ は Hausdorff である。 Y は X の
 finite subcomplex とある。 その時 $H^k(X/Y)$ は
 Hausdorff である。

(証明) exact 列

$$\rightarrow H^{k-1}(Y) \xrightarrow{\delta} H^k(X/Y) \xrightarrow{j^*} H^k(X) \rightarrow$$

を考える時, $j^*(S^k(X/Y)) \subset S^k(X) = \{0\}$ であるので

$S^k(X/Y) \subset \text{Im } \delta$. しかし $\text{Im } \delta$ は

finitely generated であるので 系 (I, 1) より $S^k(X/Y) = 0$
 すなわち $H^k(X/Y)$ は Hausdorff である。

§4. 定理 (II) の証明

Atiyah-Hirzebruch spectral sequence $\{E_r, d_r\}$ を
 思い出そう。

$$Z_r^{n, k-n} = \text{Im} \{ H^k(X^{n+1}/X^{n-1}) \rightarrow H^k(X^n/X^{n-1}) \}$$

$$B_r^{n, k-n} = \text{Im} \{ H^{k-1}(X^{n+1}/X^{n-1}) \rightarrow H^k(X^n/X^{n-1}) \}$$

$$E_r^{u, R-n} = Z_r^{u, R-n} / B_r^{u, R-n}$$

$$1 \leq r \leq \infty, \quad \forall n < \infty, \quad B_{n+1}^{u, R-n} = B_{n+2}^{u, R-n} = \dots = B_{\infty}^{u, R-n} \quad (5')$$

$$E_{n+1}^{u, R-n} > E_{n+2}^{u, R-n} > \dots > E_{\infty}^{u, R-n}$$

であり、又

$$E_{\infty}^{u, R-n} \leftarrow \cong F^n \mathcal{H}^R(X) / F^{n+1} \mathcal{H}^R(X)$$

である。

補題 (4.1) $\{\mathcal{H}^R(X^n)\}_{n \geq 0}$ が ML 条件を満たす, i.e.,

$$\forall n, \exists n_0 = n_0(K, n) \text{ s.t.}$$

$$I_m \{\mathcal{H}^R(X^{n+n_0}) \rightarrow \mathcal{H}^R(X^n)\} = \bigcap I_m \{\mathcal{H}^R(X^{n+m}) \rightarrow \mathcal{H}^R(X^n)\}$$

$$\Leftrightarrow \forall n, \exists r_0 = r_0(K, n) \text{ s.t. } E_{r_0}^{u, R-n} = E_r^{u, R-n} \text{ for } r_0 \leq r < \infty.$$

補題 (4.2) $\forall n, \exists n_0 = n_0(K, n) \text{ s.t.}$

$$I_m \{\mathcal{H}^R(X^{n+n_0}) \rightarrow \mathcal{H}^R(X^n)\} = I_m \{\mathcal{H}^R(X) \rightarrow \mathcal{H}^R(X^n)\}$$

$$\Leftrightarrow \forall n, \exists r_0 = r_0(K, n) \text{ s.t. } E_{r_0}^{u, R-n} = E_{\infty}^{u, R-n}.$$

命題 (4.3) 次の i) ~ iii) は同値である。

i) $\{\mathcal{H}^R(X^n)\}_{n \geq 0}$ が ML 条件を満たす。

ii) $\forall n, \exists r_0 = r_0(K, n) \text{ s.t. } E_{r_0}^{u, R-n} = E_r^{u, R-n} \text{ for } r_0 \leq r < \infty,$

iii) $\forall n, \exists r_0 = r_0(K, n) \text{ s.t. } E_{r_0}^{u, R-n} = E_{\infty}^{u, R-n}$

(証明) (4.1) 5') i) \Leftrightarrow ii)

i) \Leftrightarrow iii): $\{\mathcal{H}^R(X^n)\}_{n \geq 0}$ が ML 条件を満たす \Leftrightarrow

$\forall n, \exists r_0 = r_0(K, n)$ s.t.

$$\text{Im} \{ H^k(X^{n+r_0}) \rightarrow H^k(X^n) \} = \text{Im} \{ \varprojlim H^k(X^n) \rightarrow H^k(X^n) \}$$

Milnor の定理 と (4.2) より i) \Leftrightarrow iii) は明らか.

定理 (II) 次の i) ~ ix) は同値である.

i) $S^k(X) = \bigcap F^n H^k(X) = 0$,

ii) $H^k(X)$ は Hausdorff である.

iii) $H^k(X)$ は completeかつ Hausdorff である.

iv) $\pi: H^k(X) \rightarrow \varprojlim H^k(X^n)$ は同型である.

v) $\varprojlim^1 H^{k-1}(X^n) = 0$.

vi) $\{ H^{k-1}(X^n) \}$ は ML 条件を満たす.

vii) $\forall n, \exists r_0 = r_0(K, n)$ s.t. $E_{r_0}^{n, K-n-1} = E_{r_0}^{n, K-n-1}, r_0 \leq r$

viii) $\forall n, \exists r_0 = r_0(K, n)$ s.t. $E_{r_0}^{n, K-n-1} = E_{\infty}^{n, K-n-1}$

ix) $0 \rightarrow H^k(X) \hookrightarrow H^k(X; \hat{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{K} H^k(X; \hat{\mathbb{Z}}/2) \rightarrow 0$ は exact.

(証明) i) \Leftrightarrow ii) 自明

ii) \Leftrightarrow iv) iv) \Leftrightarrow v) Milnor の定理より自明

vi) \Leftrightarrow vii) \Leftrightarrow viii) (4.3) より

ii) \Leftrightarrow ix) (2.6) より

v) \Leftrightarrow vi) Gray の定理;

" $\{A_n\}$ は countable abelian groups の inductive system と

ある時 $\{A_n\}$ が ML 条件を満たす $\Leftrightarrow \varprojlim^1 A_n = 0$ "

を用いるが, $H^k(X^n)$ は今 finitely generated であるので

可能である。

ii) \Leftrightarrow iii) は Milnor の定理を用いて示すことができる。

〔注意〕 Milnor の定理により

$$S^k(X) \cong \varprojlim^1 H^{k-1}(X^n)$$

であるので、 $H^{k-1}(X^n)$ が finitely generated であること
を用いると $\varprojlim^1 H^{k-1}(X^n)$ の任意の元は任意の整数 $\neq 0$ に
よって divisible であることが知られるので、 $S^k(X)$ も又そうであ
る。これより定理 (I) において i), ii), iii) が
同値であることは、我々の方法を用いるまでもなく簡単に
証明することができる。

References

- [1] Araki-Toda : Multiplicative structure in mod 2
cohomology theories I, Osaka J. Math. 2 (1965)
- [2] Buhstaber-Miscenko : K-theory on the category of
infinite cell complexes, ~~Math. USSR Izv~~ Math. USSR Izv 2 (1968)
- [3] Gray : Spaces of the same n-type, for all n,
Topology 5 (1966)
- [4] Milnor : On axiomatic homology theory,
Pacific J. Math. 12 (1962)